

Números base 2, 8, 10, 16

Sistemas da Computação

Prof. Rossano Pablo Pinto, Msc.

rossano at gmail com

2 semestre 2007

Tópicos

- Números binário, decimal, octal, hexadecimal
- Conversões entre bases
- Números inteiros e fracionários
- aritmética binária
- representação de números negativos, complemento de 1 e 2

Introdução

- Máquinas do século XIX usavam base 10
- O matemático inglês **George Boole** (1815-1864) publicou em 1854 os princípios da lógica booleana
 - variáveis assumem apenas valores 0 e 1 (verdadeiro e falso).



Introdução

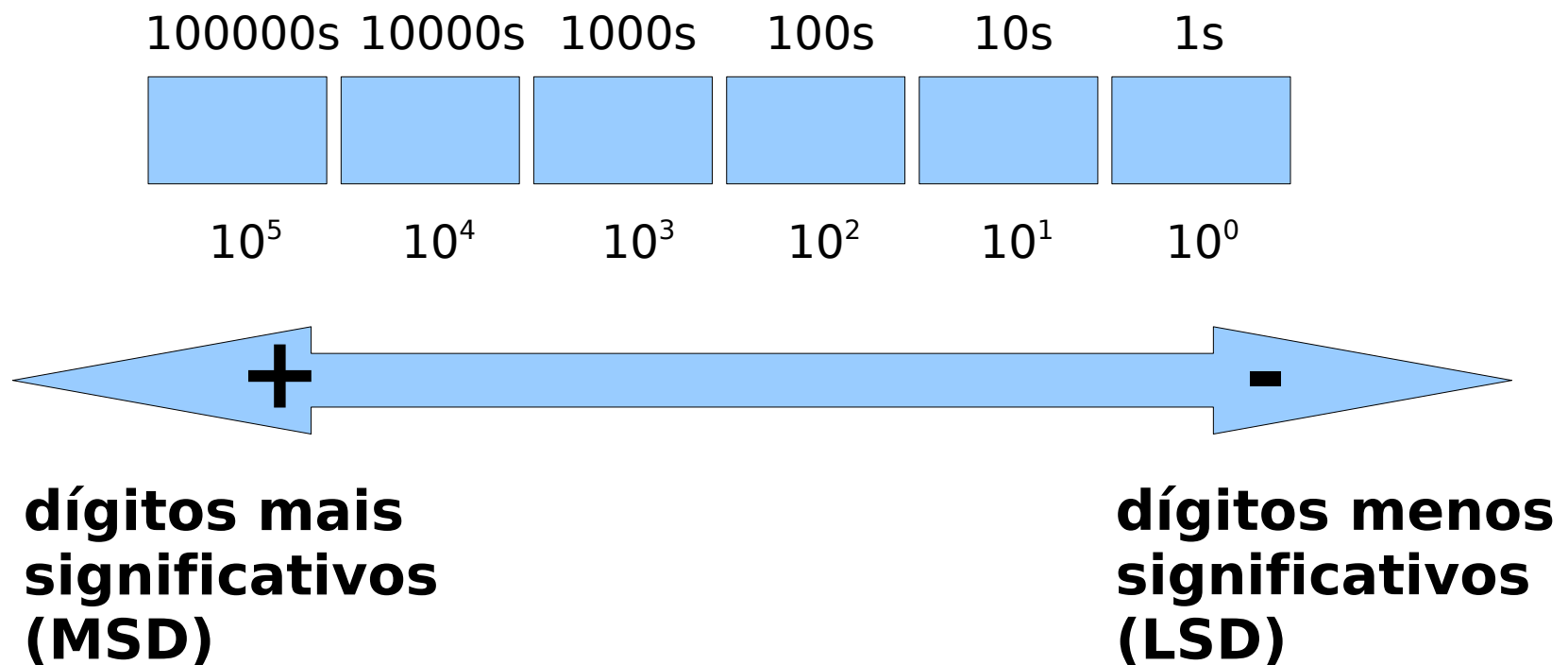
- É difícil implementar dígito decimal (um número inteiro entre 0 e 9) em componentes elétricos
 - Esta dificuldade determinou o uso da base 2 em computadores.
- A lógica booleana foi usada na implementação dos circuitos elétricos internos a partir do século XX.

O que são números decimais

- Numeração decimal – base 10
 - símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
 - característica de valor posicional (casa)
 - unidades (1s), dezenas (10s), centenas (100s), milhar (1000s), ...
 - Exemplo: número 238
 - $8 \times 1 = 8$
 - $3 \times 10 = 30$
 - $2 \times 100 = 200$
 - $8 + 30 + 200 = 238$

O que são números decimais

- Numeração decimal – base 10
 - Posições:



O que são números decimais

- Numeração decimal – base 10
 - Posições:

100000s	10000s	1000s	100s	10s	1s
0	0	1	3	7	0
10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

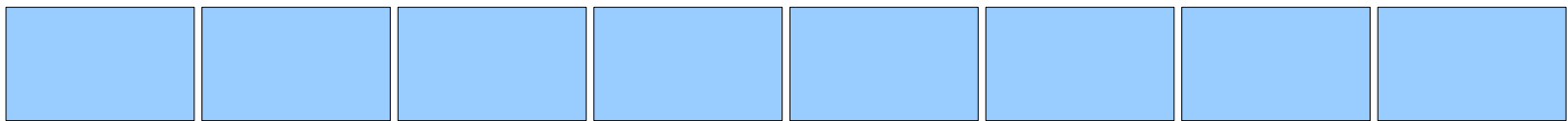
O número “mil trezentos e setenta” decimal é obtido:
 $(1 \times 1000) + (3 \times 100) + (7 \times 10) = 1000 + 300 + 70 = 1370$

O que são números binários

- Numeração binária – base 2
 - símbolos 0, 1
 - Cada dígito binário é chamado bit
 - característica de valor posicional (casa)
 - cada posição vale o dobro da anterior, assim:
 - casa dos 1s, casa dos 2s, casa dos 4s, casa dos 8s, casa dos 16s, ...

O que são números binários

- Posições:

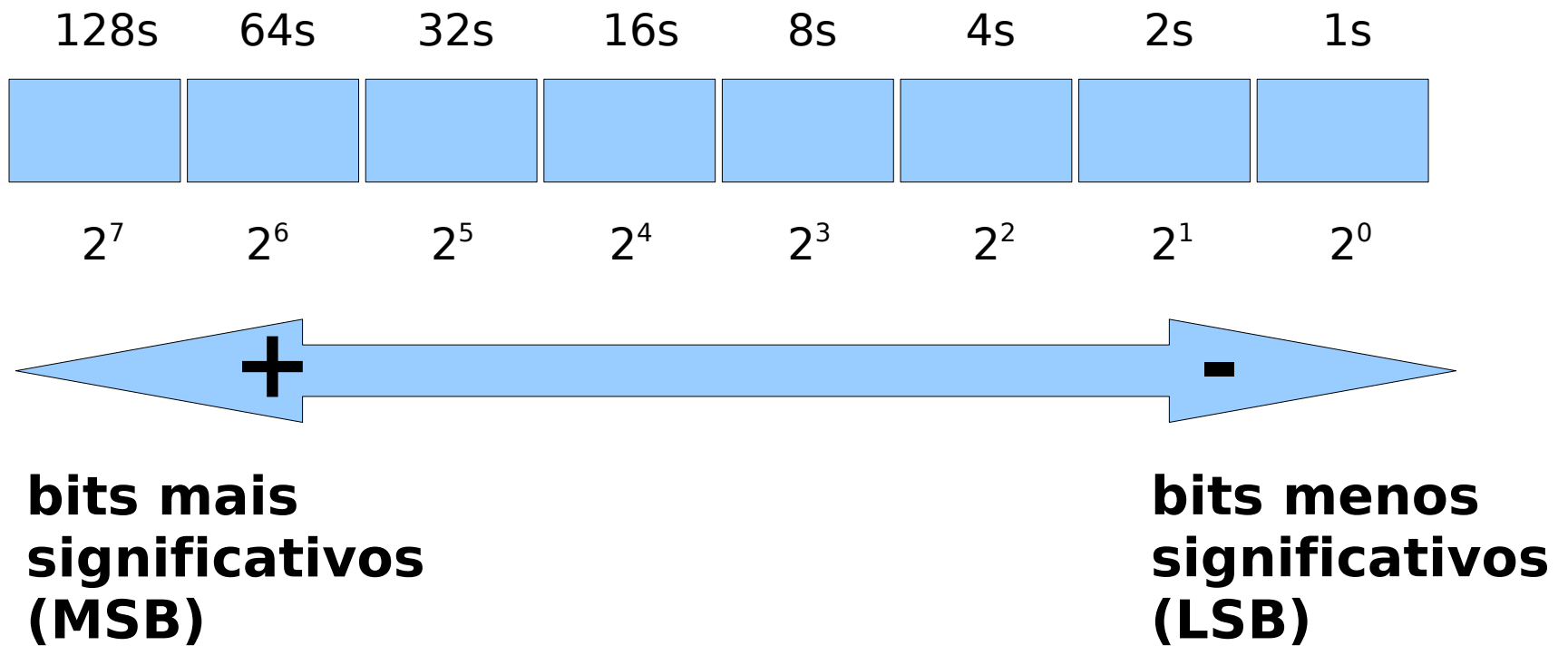


**bits mais
significativos
(MSB)**

**bits menos
significativos
(LSB)**

O que são números binários

- Posições:



O que são números binários

- Exemplos:

128s	64s	32s	16s	8s	4s	2s	1s
0	0	0	1	0	0	1	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

O número “zero, zero, zero, um, zero, zero, um, um” binário vale $16 + 2 + 1 = 19$

$$10011_2 = 19_{10}$$

O que são números binários

- Exemplos:

128s	64s	32s	16s	8s	4s	2s	1s
0	0	1	1	0	0	1	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

O número “zero, zero, um, um, zero, zero, um, um” binário vale $32 + 16 + 2 + 1 = 51$

$$\mathbf{110011}_2 = \mathbf{51}_{10}$$

O que são números binários

- Exemplos:

128s	64s	32s	16s	8s	4s	2s	1s
0	0	1	1	0	0	1	0
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

O número “zero, zero, um, um, zero, zero, um, zero” binário vale $32 + 16 + 2 = 50$

$$\mathbf{110010_2 = 50_{10}}$$

O que são números binários

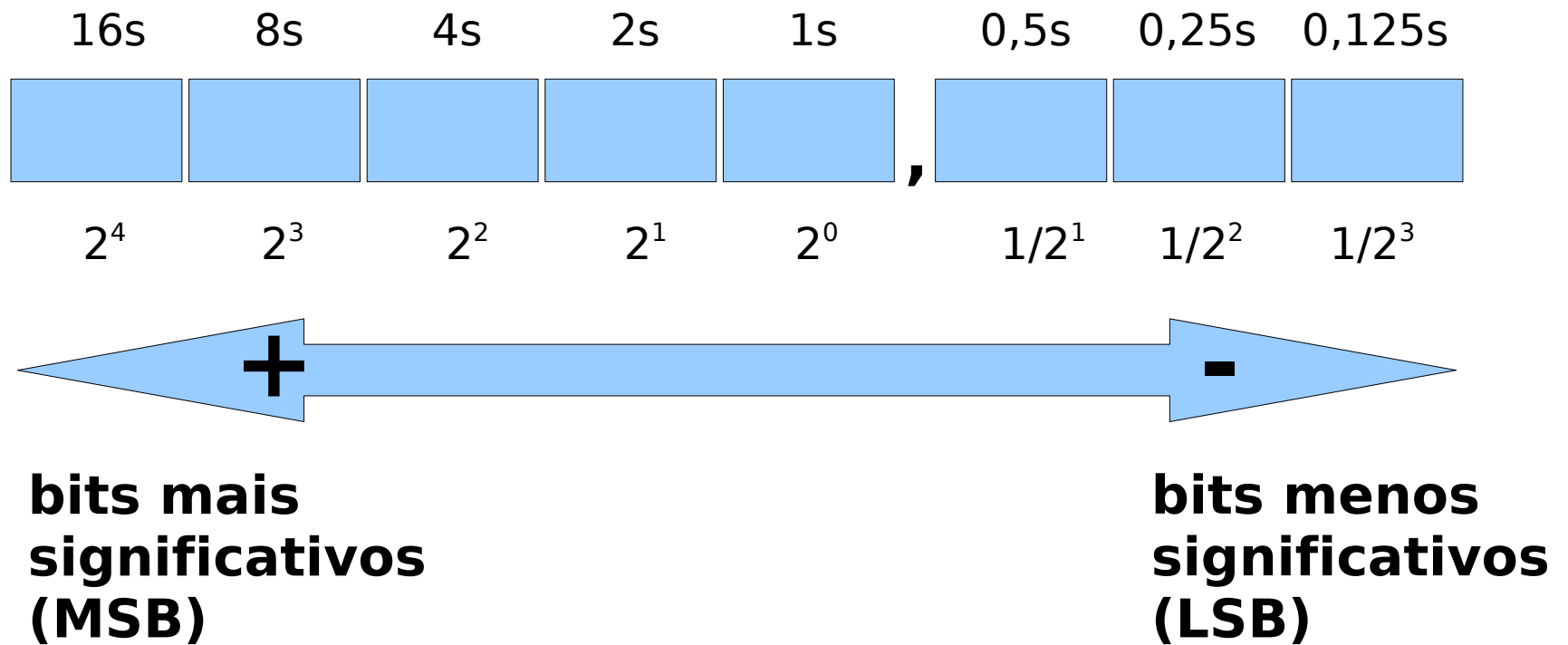
- Exemplos:

128s	64s	32s	16s	8s	4s	2s	1s
0	0	1	0	1	1	1	0
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

O número “zero, zero, um, zero, um, um, um, zero” binário vale?

O que são números binários

- Fracionários:



O que são números binários

- Fracionários:

16s	8s	4s	2s	1s	0,5s	0,25s	0,125s
0	1	1	1	0	1	0	1
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	$1/2^1$	$1/2^2$	$1/2^3$

O número “zero, um, um, um, zero vírgula, um, zero um” binário vale:

$$8 + 4 + 2 + 0,5 + 0,125 = 14,625$$

$$\mathbf{1110,101_2 = 14,625_{10}}$$

O que são números binários

- Conversão de base 10 para base 2:
 - Trabalha com divisão inteira + resto

$$- 87_{10} = 1010111_2$$

$$87 / 2 = 43 \text{ resto } 1$$

$$43 / 2 = 21 \text{ resto } 1$$

$$21 / 2 = 10 \text{ resto } 1$$

$$10 / 2 = 5 \text{ resto } 0$$

$$5 / 2 = 2 \text{ resto } 1$$

$$2 / 2 = 1 \text{ resto } 0$$

$$1 / 2 = 0 \text{ resto } 1$$

O que são números binários

- Conversão de base 10 para base 2:
 - Trabalha com divisão inteira + resto

$$- 87_{10} = 1010111_2$$

VERIFICANDO

	64s	32s	16s	8s	4s	2s	1s
87 / 2 = 43 resto 1	1	0	1	0	1	1	1
43 / 2 = 21 resto 1							
21 / 2 = 10 resto 1							
10 / 2 = 5 resto 0							
5 / 2 = 2 resto 1							
2 / 2 = 1 resto 0							
1 / 2 = 0 resto 1							
	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

O que são números binários

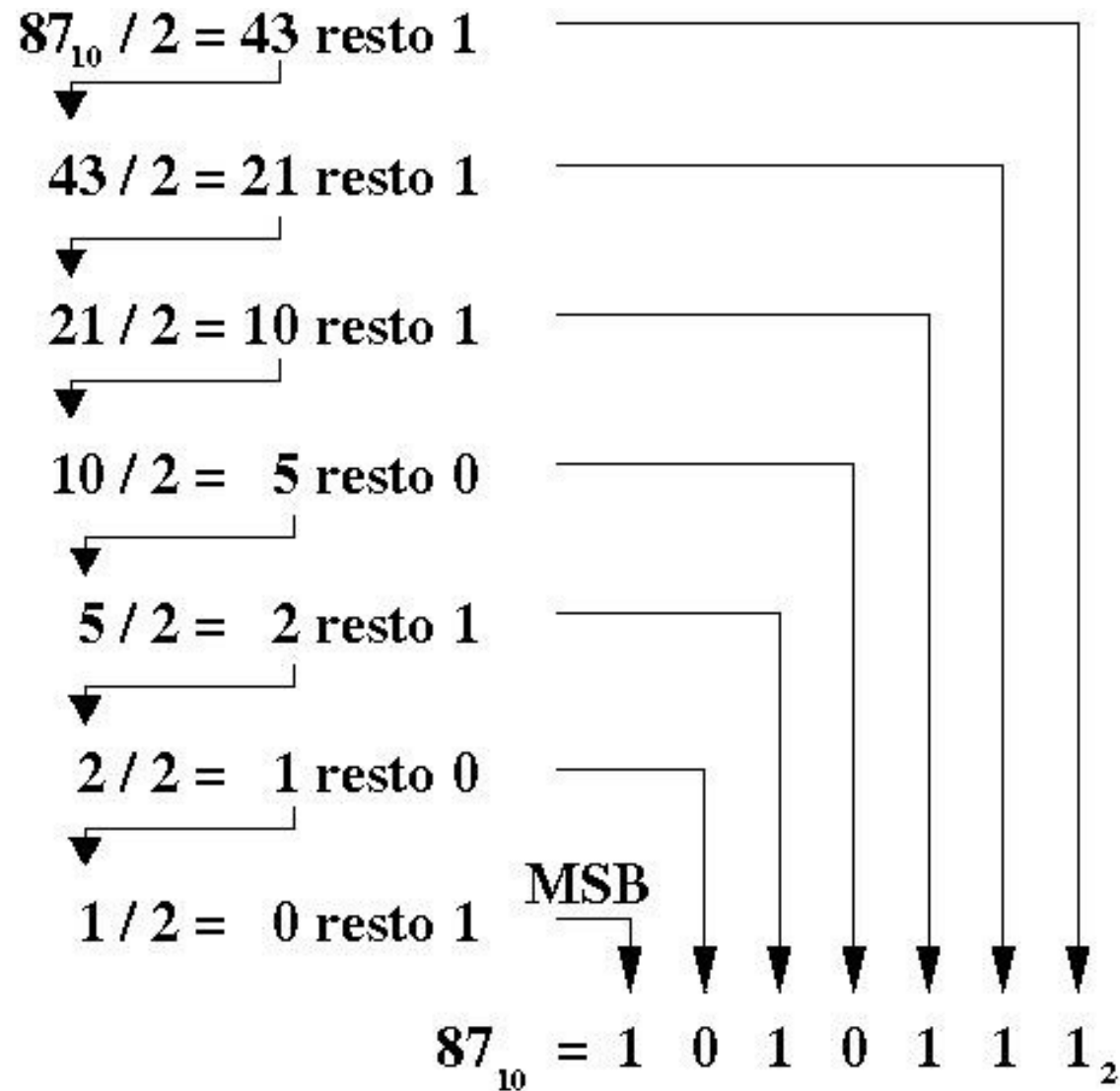
- Conversão de base 10 para base 2:
 - Trabalha com divisão inteira + resto

$$- 87_{10} = 1010111_2$$

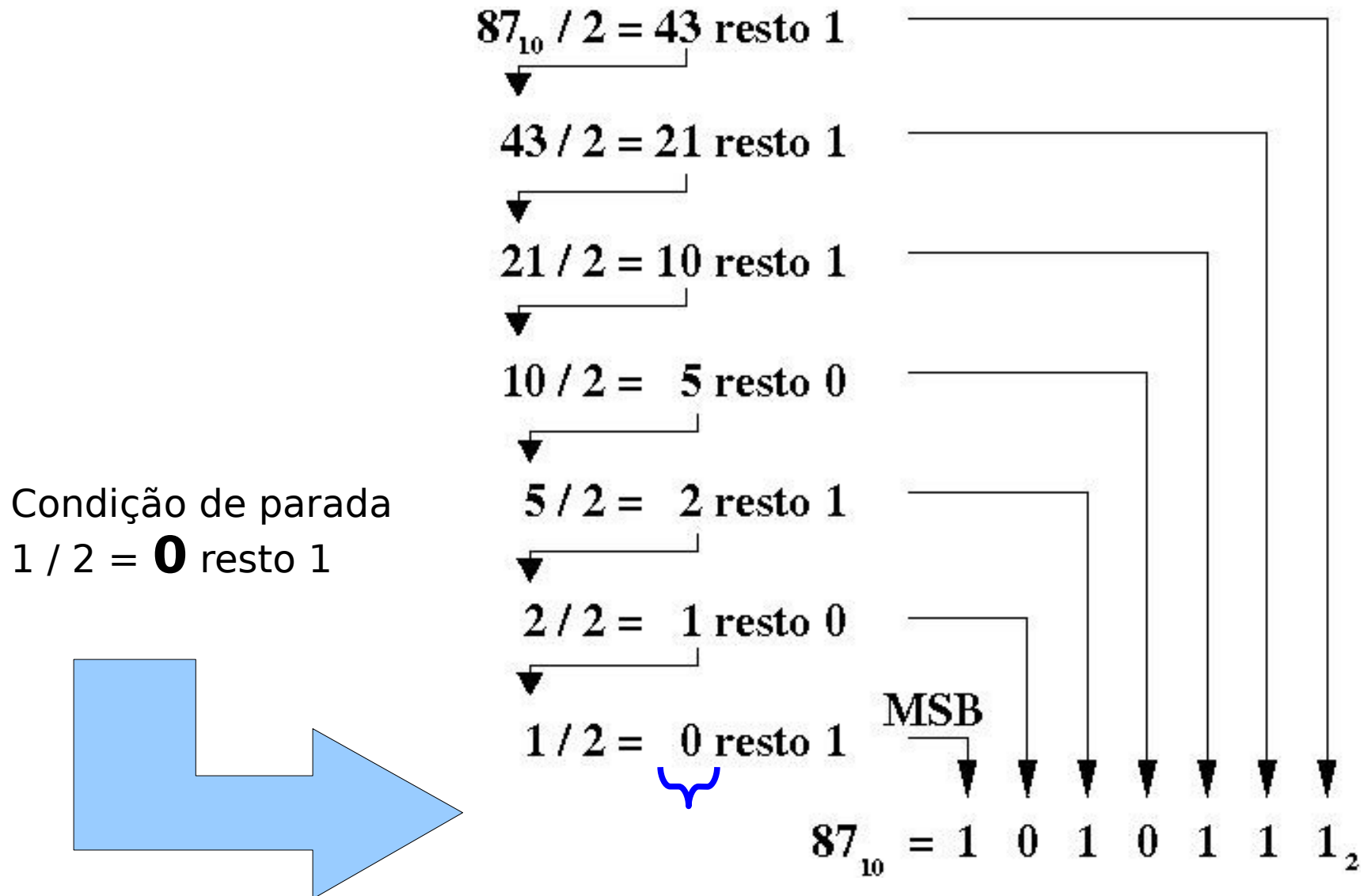
VERIFICANDO

	64s	32s	16s	8s	4s	2s	1s
87 / 2 = 43 resto 1	1	0	1	0	1	1	1
43 / 2 = 21 resto 1							
21 / 2 = 10 resto 1							
10 / 2 = 5 resto 0							
5 / 2 = 2 resto 1							
2 / 2 = 1 resto 0							
1 / 2 = 0 resto 1							
	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	$64 + 16 + 4 + 2 + 1 = 87$						

O que são números binários

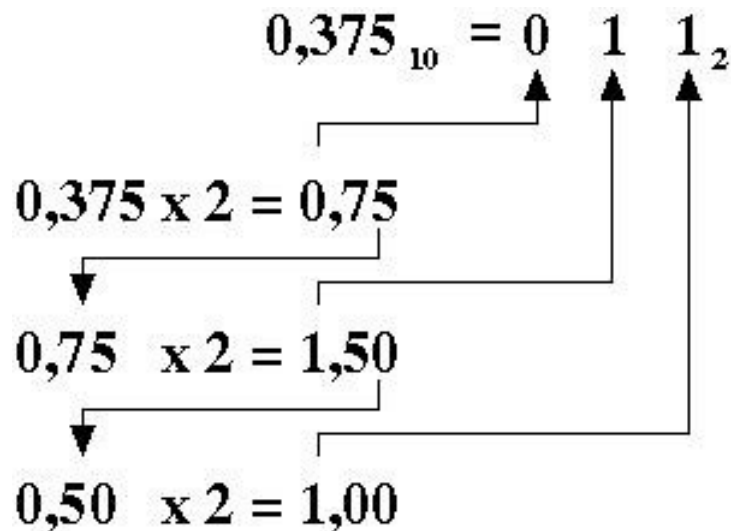


O que são números binários



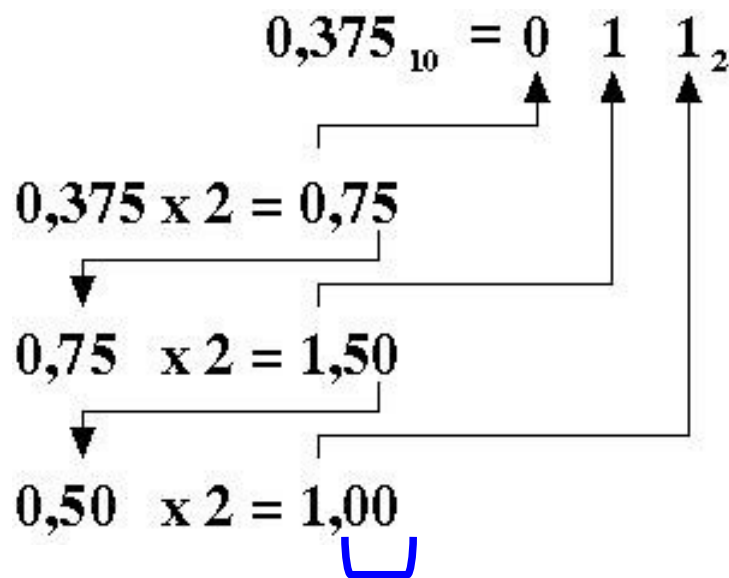
O que são números binários

- Conversão fracionária base 10 p/ base 2
 - $0,375_{10} = ,011_2$

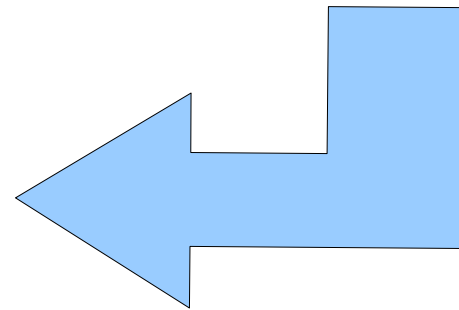


O que são números binários

- Conversão fracionária base 10 p/ base 2
 - $0,375_{10} = ,011_2$



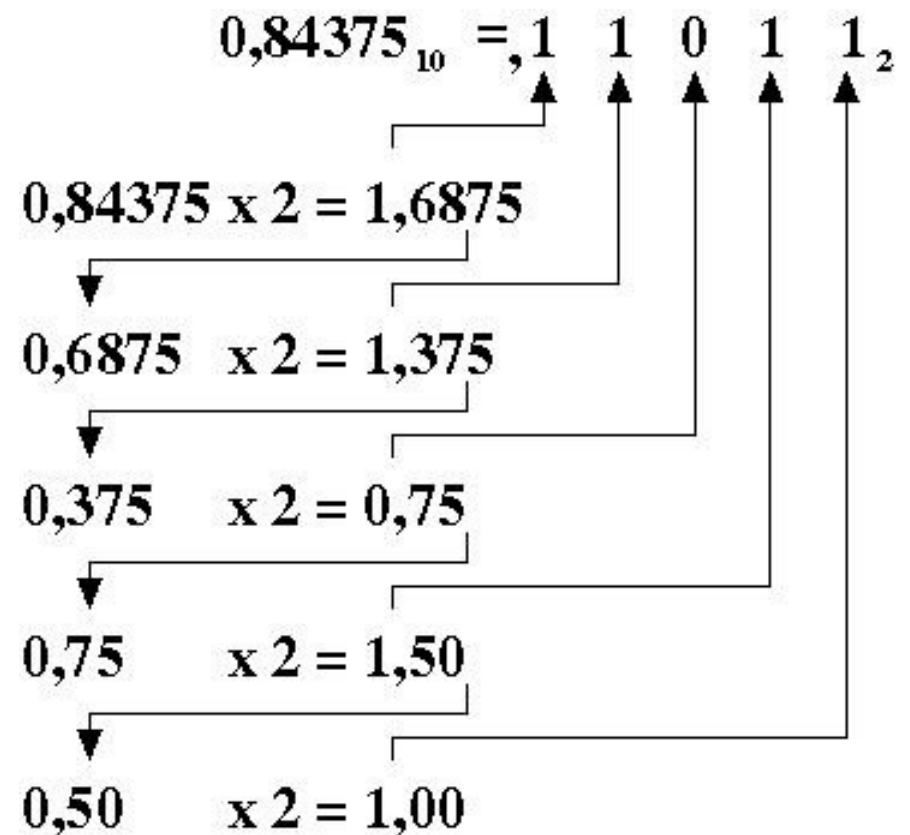
Condição de parada
0,50 x 2 = 1,00



O que são números binários

- Conversão fracionária base 10 p/ base 2

$$- 0,84375_{10} = ,11011_2$$

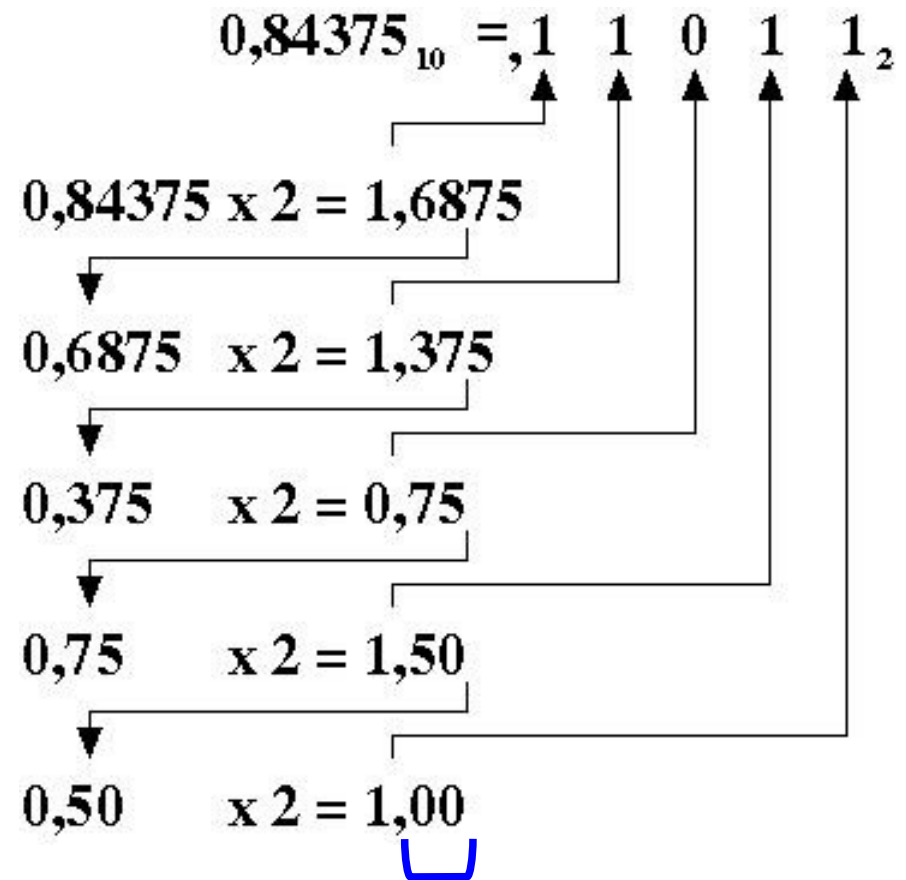
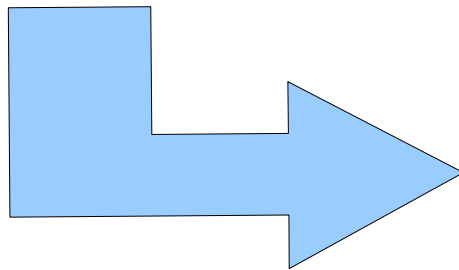


O que são números binários

- Conversão fracionária base 10 p/ base 2

$$- 0,84375_{10} = ,11011_2$$

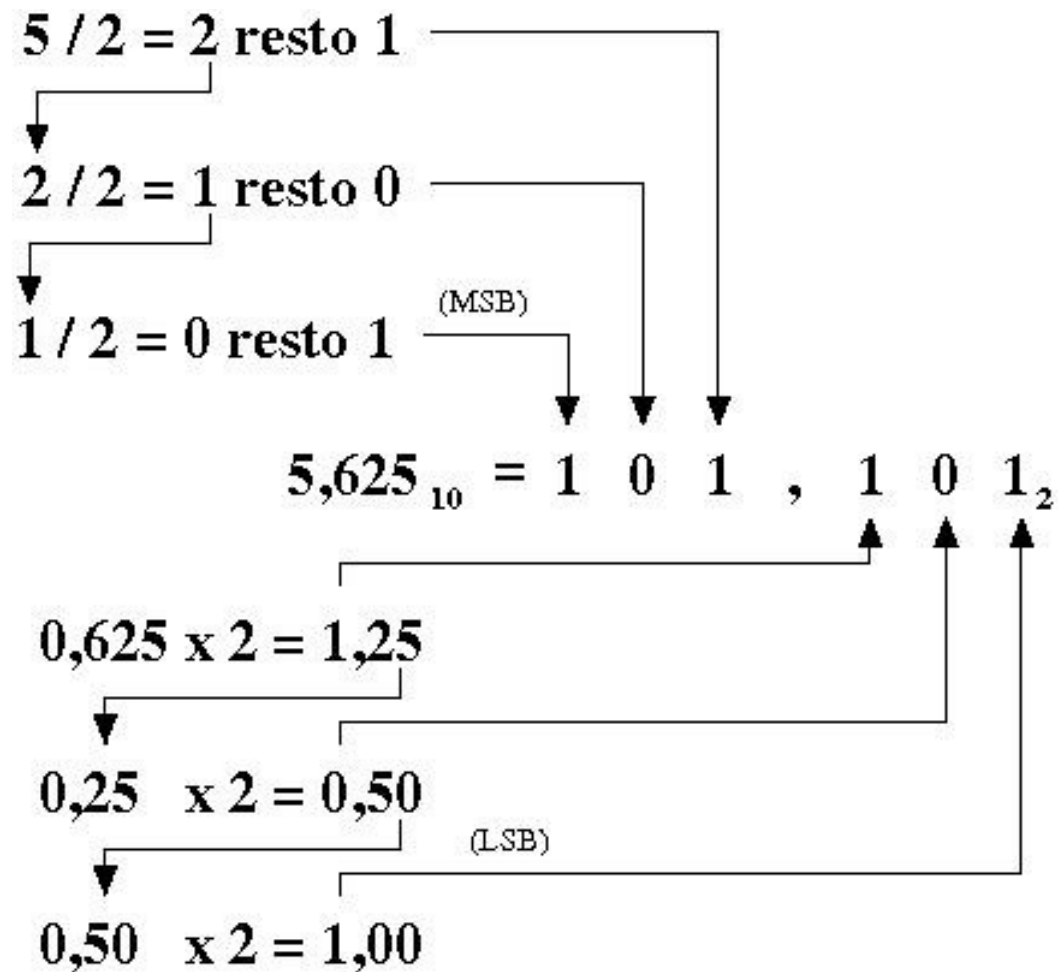
Condição de parada
 $0,50 \times 2 = 1,00$



O que são números binários

- Conversão fracionária base 10 p/ base 2
 - $5,625_{10} = 101,101_2$

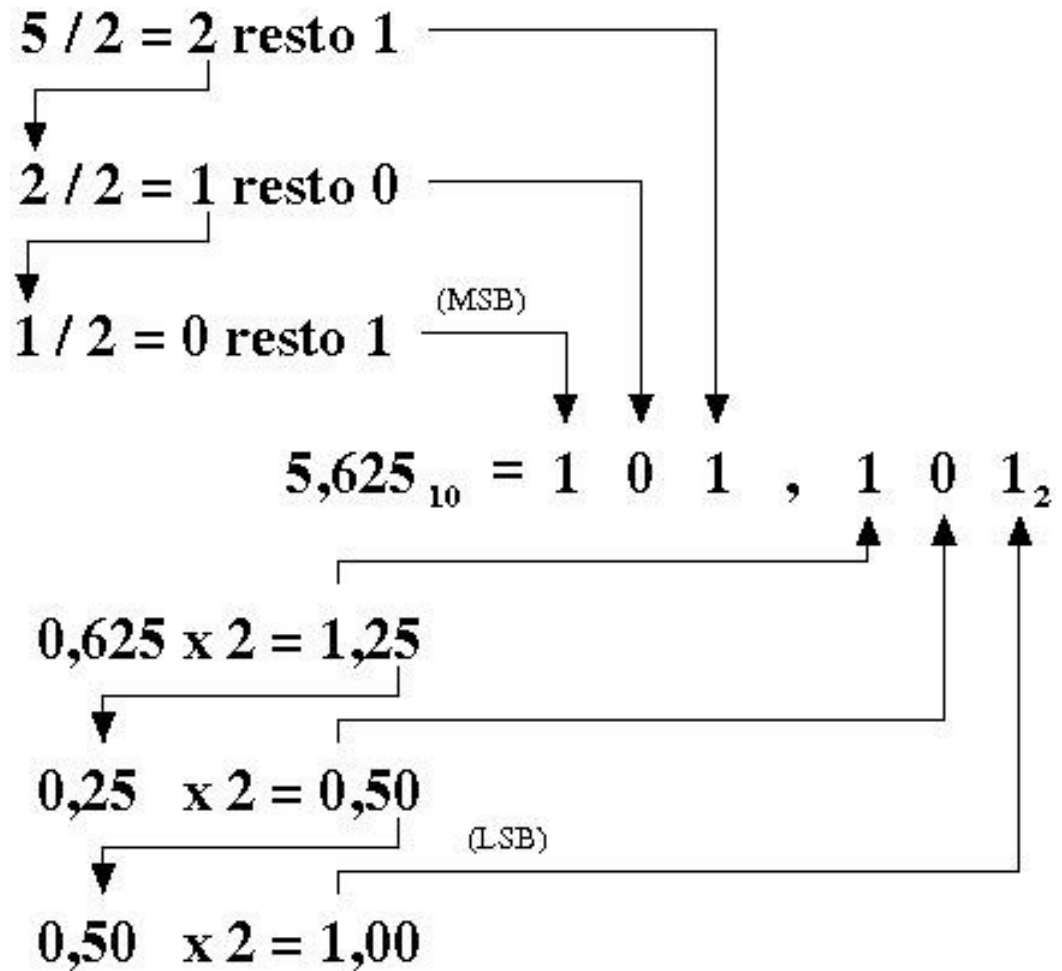
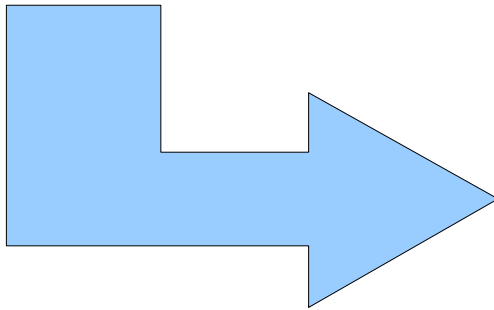
O que são números binários



O que são números binários

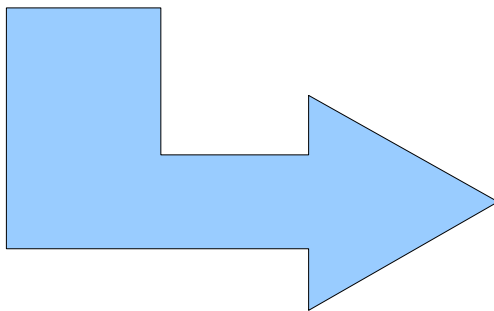
Condição de parada

$1 / 2 = \mathbf{0}$ resto 1



Condição de parada

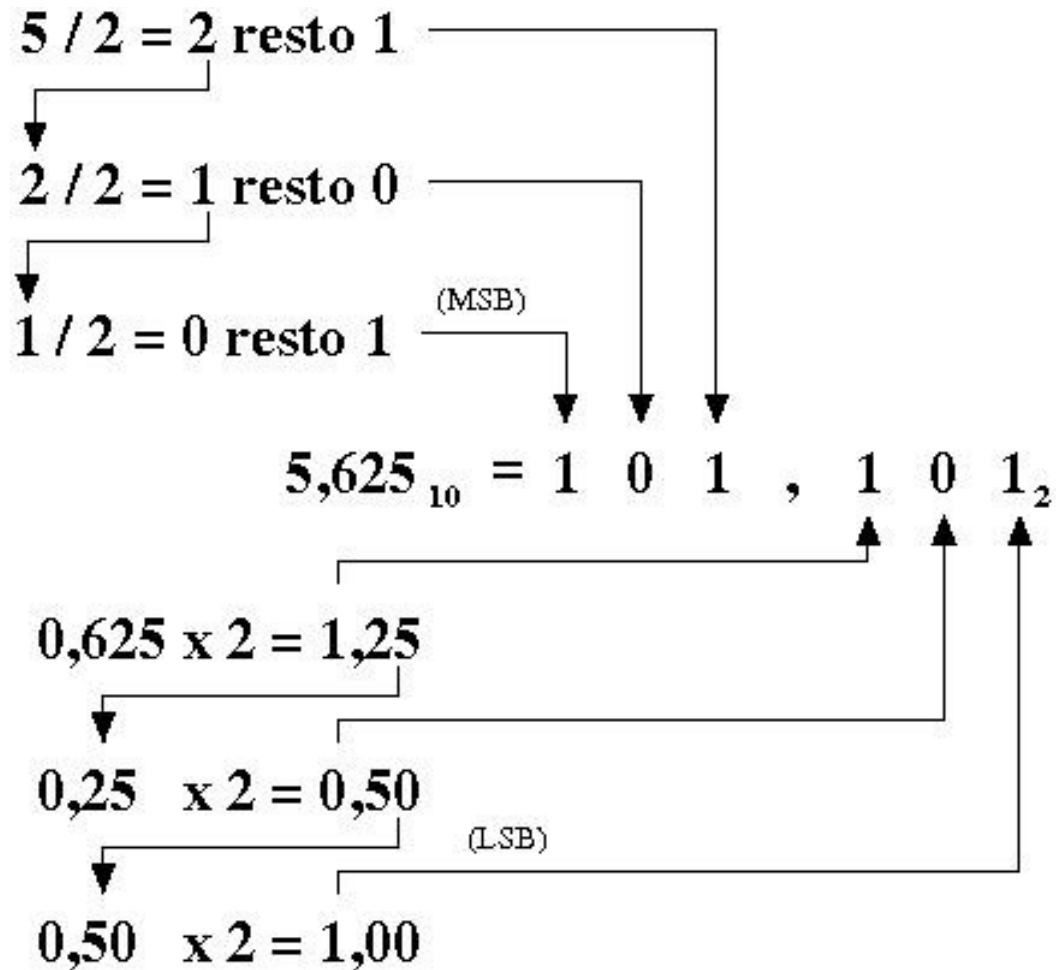
$0,50 \times 2 = 1, \mathbf{00}$



O que são números binários

DICA:

DIVIDE



MULTIPLICA

O que são números binários

- Exercícios:
 - Conversões entre bases

O que são números binários

- Soma de números base 2
 - Regra 1: $0 + 0 = 0$
 - Regra 2: $0 + 1 = 1$
 - Regra 3: $1 + 0 = 1$
 - Regra 4: $1 + 1 = 0$ e “vai-um” (transporte)
 - resultado final = 10

O que são números binários

- Soma de números base 2

Binario	Decimal
$\begin{array}{r} 100 \\ + 010 \\ \hline 110 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ + 2 \\ \hline 6 \end{array}$

O que são números binários

- Soma de números base 2

	Binario	Decimal
Vai-um	1	
	1	5
	1	
	0	3
	1	
	1	
+	0	+
	1	8
	0	
	0	
	0	

O que são números binários

- Números com precisão FINITA
 - Quanto é possível representar em 3 casas ?
- Conceito de overflow
 - resultado da soma é um número maior que o número de bits para representá-lo
 - Ex.: registrador de 4 bits
 - $1111 + 0001 \rightarrow$ overflow
 - $0001 + 0111 \rightarrow$ OK
 - $1010 + 0111 \rightarrow$ overflow

O que são números binários

- Exercícios
 - Soma de números binários

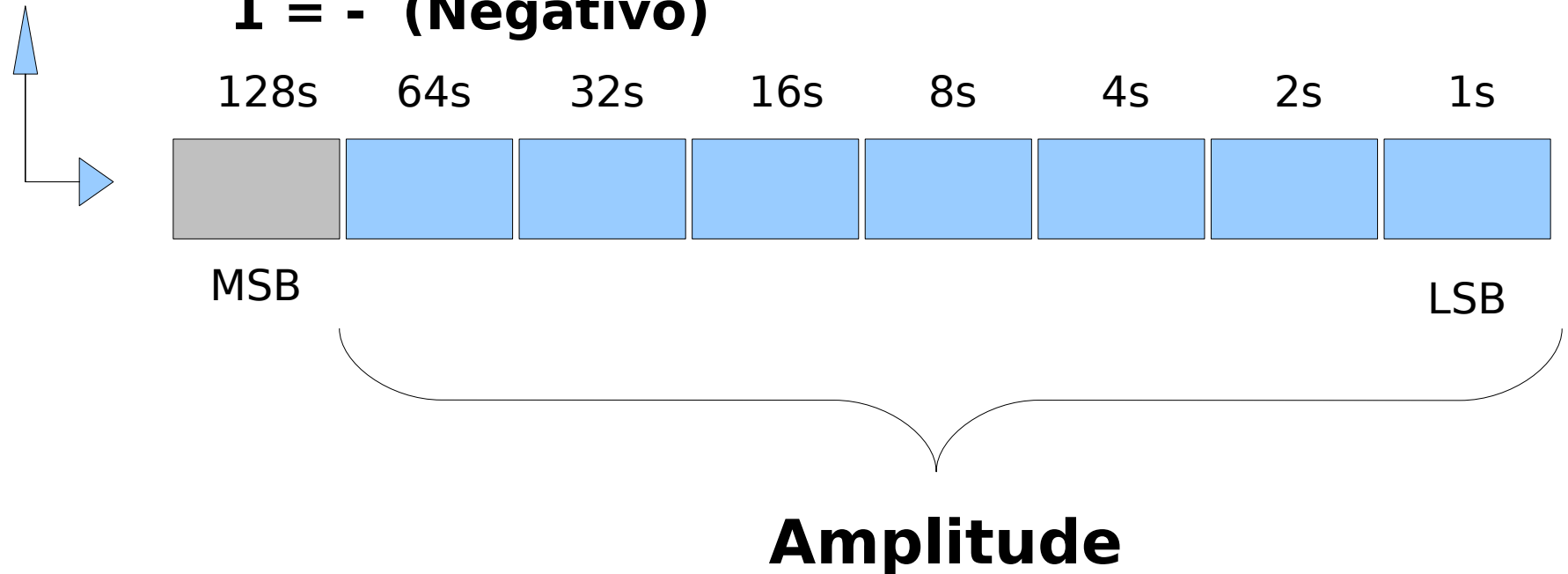
O que são números binários

- Representação de números negativos em binário (3 maneiras + conhecidas):
 - magnitude com sinal (signed magnitude)
 - sinônimos: magnitude / amplitude
 - complemento de 1 (one's complement)
 - complemento de 2 (two's complement)

O que são números binários

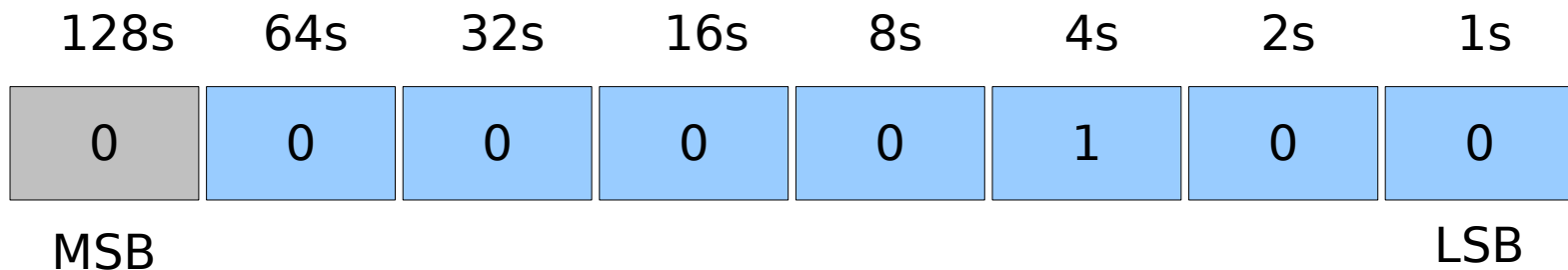
Números binários com sinal
Ex.: 8 bits

Bit de sinal **0 = + (Positivo)**
1 = - (Negativo)



O que são números binários

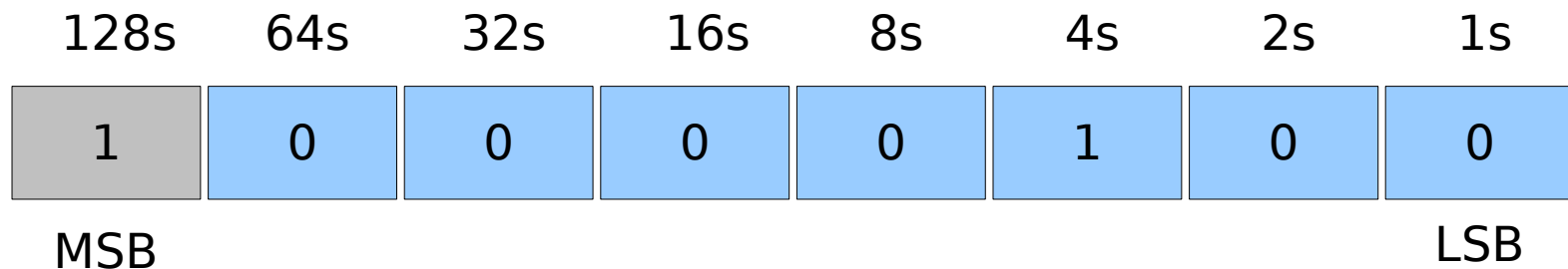
- magnitude com sinal (signed magnitude)



$$00000100_2 = 4_{10}$$

O que são números binários

- magnitude com sinal (signed magnitude)



$$10000100_2 = -4_{10}$$

O que são números binários

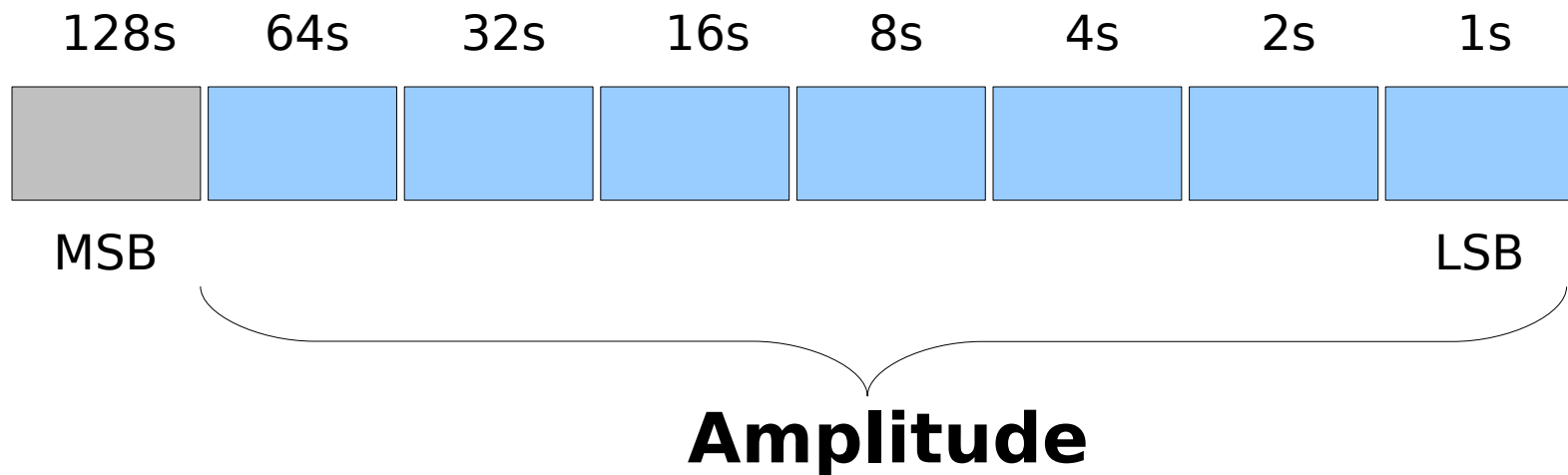
- magnitude com sinal (signed magnitude)
 - Problema: 2 representações para 0 (zero)

$$\mathbf{00000000}_2 = \mathbf{0}_{10}$$

$$\mathbf{10000000}_2 = \mathbf{-0}_{10}$$

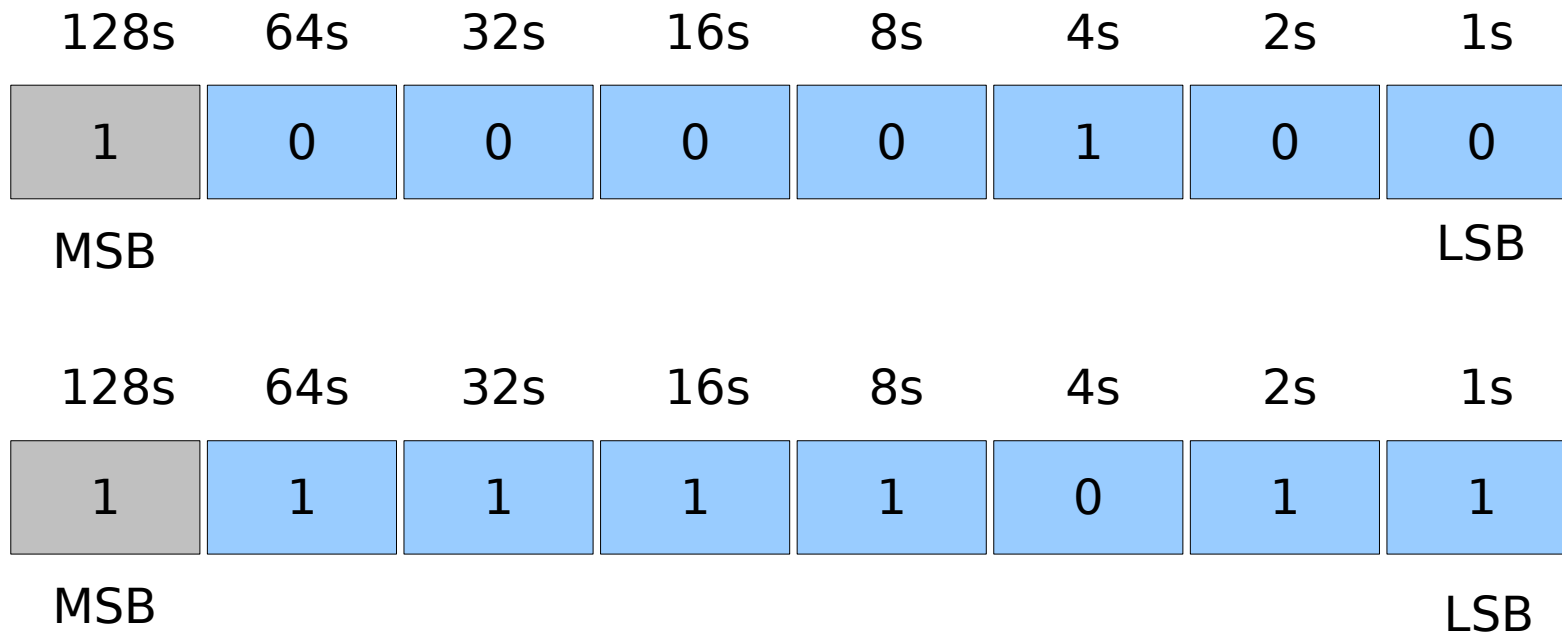
O que são números binários

- complemento de 1 (one's complement)
 - o MSB é utilizado para sinal
 - inverte todos os bits da amplitude (0 vira 1 e 1 vira 0)



O que são números binários

- complemento de 1 (one's complement)



$$11111011_2 = -4_{10}$$

O que são números binários

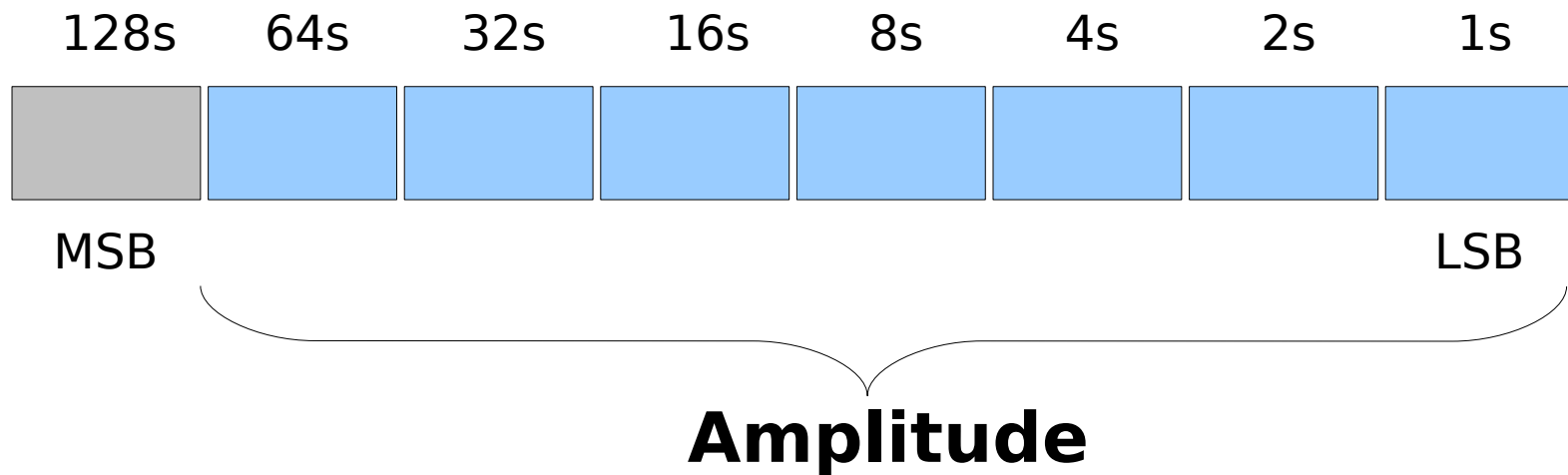
- complemento de 1 (one's complement)
 - Problema: 2 representações para o 0 (zero)

$$\mathbf{00000000}_2 = \mathbf{0}_{10}$$

$$\mathbf{11111111}_2 = -\mathbf{0}_{10}$$

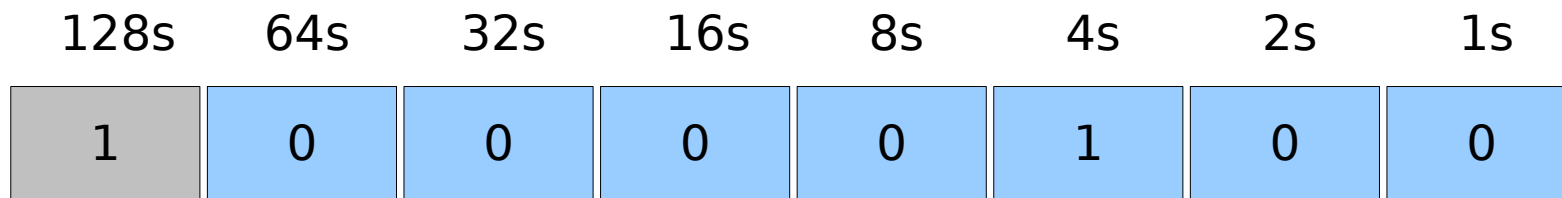
O que são números binários

- complemento de 2 (two's complement)
 - o MSB é utilizado para indicar o sinal
 - a amplitude é representada em complemento de 1 somado de 1



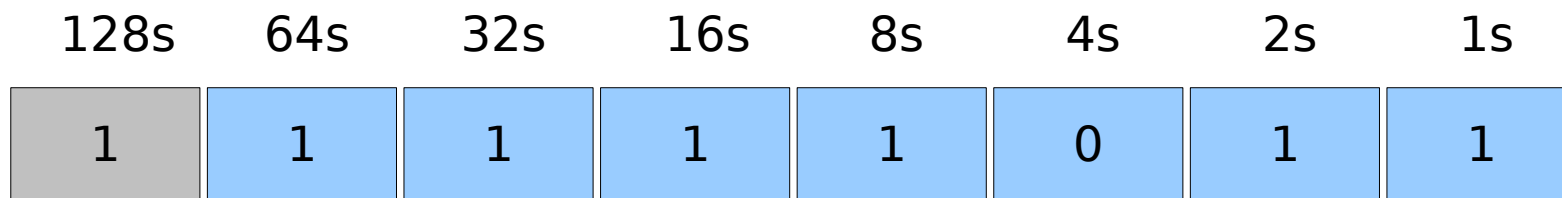
O que são números binários

- complemento de 2 (two's complement)



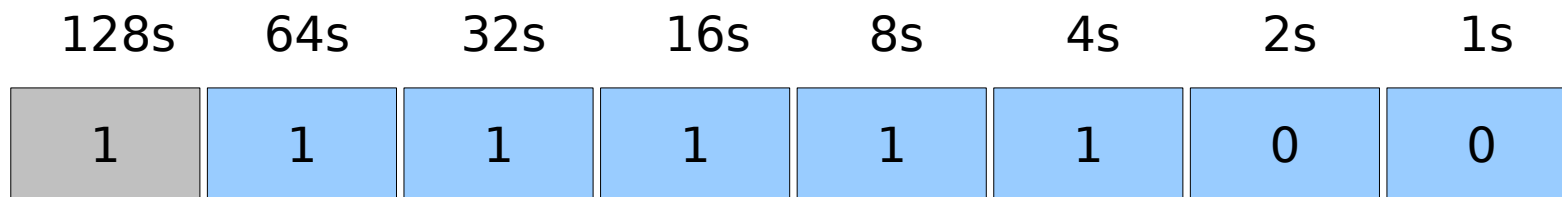
MSB

LSB



MSB

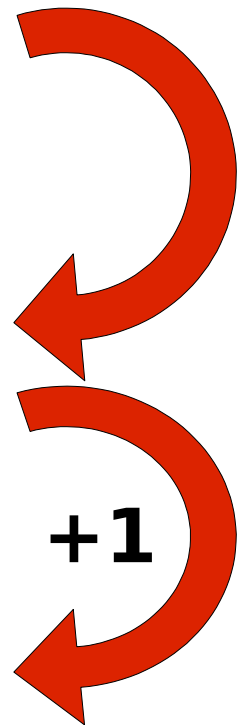
LSB



MSB

LSB

$$\mathbf{11111100}_2 = -4_{10}$$



O que são números binários

- complemento de 2 (two's complement)
 - Benefícios:
 - Mesmo circuito para soma e subtração
 - apenas uma representação de zero:

$$\mathbf{00000000}_2 = \mathbf{0}_{10}$$

O que são números binários

- complemento de 2 (two's complement)

Representação em complemento de 2 com 8 bits

	sinal	amplitude	
+127	0	111	1111
+126	0	111	1110
+125	0	111	1101
+124	0	111	1100
...	.	.	.
+3	0	000	0011
+2	0	000	0010
+1	0	000	0001
+0	0	000	0000
-1	1	111	1111
-2	1	111	1110
-3	1	111	1101
...	.	.	.
-125	1	000	0011
-126	1	000	0010
-127	1	000	0001
-128	1	000	0000

O que são números binários

- complemento de 2 (two's complement)
 - Faixas de números:
 - 8 bits: -128 à +127
 - 16 bits: -32.768 à +32.767
 - 32 bits: -2.147.483.648 à +2.147.483.647
 - 64 bits: -9.223.372.036.854.775.808 à +9.223.372.036.854.775.807

O que são números binários

- Adição de números complemento de 2

Adição de 1 número positivo menor a 1 negativo maior

	1 1 1		
(+20)	0001 0100	1a Parcela em complemento de 2	
+(-50)	+ 1100 1110	2a Parcela em complemento de 2	
-30	1110 0010	Soma em complemento de 2	

Adição de 1 número positivo maior a 1 negativo menor

	1 1 1		
(+40)	0010 1000	1a Parcela em complemento de 2	
+(-13)	+ 1111 0011	2a Parcela em complemento de 2	
+27	1 0001 1011	Soma em complemento de 2	

Descarte

O que são números binários

- Subtração de números complemento de 2

$\begin{array}{r} (+75) \\ -(+41) \\ \hline +34 \end{array}$	Forma o Comp. 2 e soma 0010 1001	$\begin{array}{r} 0100\ 1011 \\ + 1101\ 0111 \\ \hline 1\ 0010\ 0010 \end{array}$	Minuendo Subtraendo Diferença em complemento de 2
		Descarte	

$\begin{array}{r} (-80) \\ -(-30) \\ \hline -50 \end{array}$	Forma o Comp. 2 e soma 0001 1110	$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 1011\ 0000 \\ + 0001\ 1110 \\ \hline 1100\ 1110 \end{array}$	Minuendo Subtraendo Diferença em complemento de 2
--	--	--	--

O que são números binários

- Subtração de números complemento de 2

	1		
$\begin{array}{r} (+24) \\ \hline -(-20) \\ \hline +44 \end{array}$	<p>Forma o Comp. 2 e soma</p> $\begin{array}{r} 0001\ 0100 \\ + \\ \hline 0001\ 0100 \\ \hline 0010\ 1100 \end{array}$	<p>Minuendo</p> <p>Subtraendo</p> <p>Diferença em complemento de 2</p>	<p>→</p>

	1 1		
$\begin{array}{r} (-60) \\ \hline -(+15) \\ \hline -75 \end{array}$	<p>Forma o Comp. 2 e soma</p> $\begin{array}{r} 1100\ 0100 \\ + \\ \hline 1111\ 0001 \\ \hline 11011\ 0101 \end{array}$	<p>Minuendo</p> <p>Subtraendo</p> <p>Diferença em complemento de 2</p>	<p>→</p> <p>Descarte</p>

O que são números binários

- Prefixos binários

- kilo – k/K – $2^{10} = 1.024$

- mega – M – $2^{20} = 1.048.576$

- giga – G – $2^{30} = 1.073.741.824$

- tera – T – $2^{40} = 1.099.511.627.776$

- peta – P – $2^{50} = 1.125.899.906.842.624$

- exa – E – $2^{60} = 1.152.921.504.606.846.976$

- zetta – Z – $2^{70} = 1.180.591.620.717.411.303.420$

- yotta – Y – $2^{80} = 1.208.925.819.614.629.174.706.176$

O que são números binários

- Exercícios
 - Soma e subtração usando complemento de 2

O que são números hexadecimais

- Numeração hexadecimal – base 16
 - símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
 - característica de valor posicional (casa)
 - 1s, 16s, 256s, 4096s, 65536s, 1048576s...
 - Exemplo: número 2B6
 - $6 \times 1 = 6$
 - $11 \times 16 = 176$
 - $2 \times 256 = 512$
 - $6 + 176 + 512 = 694_{10}$

O que são números hexadecimais

- Numeração hexadecimal – base 16
 - Posições

1Ms	65536s	4096s	256s	16s	1s
0	0	0	A	3	F
16^5	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0

O número “A3F” hexadecimal é obtido:

$$(10 \times 256) + (3 \times 16) + (15 \times 1) = 2560 + 48 + 15 = 2623_{10}$$

O que são números hexadecimais

- Numeração hexadecimal – base 16
 - Posições

1Ms	65536s	4096s	256s	16s	1s	0,0625s
0	0	0	A	3	F	C
16^5	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0	$1/16^1$

O número “A3F” hexadecimal é obtido:

$$(10 \times 256) + (3 \times 16) + (15 \times 1) + (12 \times 0,0625) = 2560 + 48 + 15 + 0,75 = 2623,75_{10}$$

O que são números hexadecimais

- Numeração hexadecimal – base 16
 - Conversões:

$$45 / 16 = 2 \text{ resto } 13$$


$$2 / 16 = 0 \text{ resto } 2$$

$$45_{10} = 2 \text{ D}_{16}$$

$$0,25 \times 16 = 4,00$$


$$0,00 \times 16 = 0,00$$

$$0,25_{10} = 0,4_{16}$$

O que são números hexadecimais

- Numeração hexadecimal – base 16
 - Conversão hexa \leftrightarrow binário
 - Conceitos:
 - nibble = conjunto de 4 bits
 - Quanto vale $1111\ 0010\ 1110_2$ em hexadecimal?
 - $F2E_{16}$

O que são números octais

- Numeração octal – base 8
 - Elabore toda a teoria dos números octais, tendo vista em as teorias de base 2, 10 e 16 vistas até agora.
- Elabore a teoria aplicada aos números de base 4, 5, 6 e 9